



Bertil Haack · Ulrike Tippe
Michael Stobernack · Tilo Wendler

Mathematik für Wirtschafts- wissenschaftler

Intuitiv und praxisnah

 Springer Gabler

Inhaltsverzeichnis

1	Modellieren und Argumentieren	1
1.1	Beispiel: Kauf einer Papierschneidemaschine – Wie wir uns für die richtige Maschine entscheiden können	5
1.2	Analyse: Wie wir das Beispiel gelöst haben	6
1.3	Verallgemeinerung: Wie wir wirtschaftswissenschaftliche Fragestellungen grundsätzlich lösen können	9
1.4	Leitplanken auf einer kurvigen Straße: Wie wir uns das Modellieren und Argumentieren erleichtern können	11
1.5	Modellieren – aber richtig! Wie wir zu einem passenden mathematischen Modell kommen	12
1.6	Heurismen für Arbeitsschritt 4 – Wie wir die richtigen Werkzeuge für unsere Aufgabenstellung entdecken können	16
1.7	Empfehlungen für die Arbeitsschritte 5–7: Wie wir unsere Lösung erklären können	21
	Literatur	29
2	Rechnen mit reellen Zahlen	31
2.1	Welche sind die logischen Grundlagen in der Mathematik?	34
2.2	Was sind Mengen im mathematischen Sinne?	37
2.3	Mit welchen Zahlen haben wir zu tun? (Aufbau des Zahlensystems)	41
2.4	Wie rechnen wir mit (allgemeinen) reellen Zahlen und worauf müssen wir dabei besonders achten?	44
2.5	Noch mehr über reelle Zahlen: Potenzen und Wurzeln	50
2.6	... und noch ein neuer Begriff: der Logarithmus	54
2.7	Weitere nützliche Dinge zum Einstieg in die Mathematik – oder was wir schon immer einmal wissen wollten	55
	Literatur	59
3	Gleichungslehre	61
3.1	Allgemeine Gleichungslehre – Was Gleichungen sind und wie wir grundsätzlich mit ihnen umgehen können	65
3.2	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten – Wie wir Gleichungen lösen können, in denen die Unbekannte „einfach“ vorkommt	71
3.3	Quadratische Gleichungen – Wie wir Gleichungen lösen können, in denen die Unbekannte quadratisch vorkommt	77
3.4	Gleichungen höheren als zweiten Grades – Wie wir mit Gleichungen umgehen können, in denen die Unbekannte in einer höheren als der ersten oder zweiten Potenz vorkommt	85

3.5	Andere Gleichungsarten (Bruch-, Wurzel-, Exponential-, Logarithmengleichungen) – Wie wir bei Gleichungen vorgehen können, in denen die Unbekannte keine Potenz ist	91
3.6	Einfache lineare Gleichungssysteme – Wie wir vorgehen können, wenn wir mehrere Unbekannte haben, die recht einfach miteinander zusammenhängen	97
3.7	Lineare Ungleichungen – Wie wir zu Lösungen kommen, wenn keine Gleichheit besteht	102
	Literatur	110
4	Elementare reelle Funktionen	111
4.1	Funktionen – Wie können wir Zusammenhänge zwischen (ökonomischen) Größen beschreiben?	114
4.2	Lineares – Wenn zwei ökonomische Größen ein geradliniges Verhältnis zueinander haben	120
4.3	Quadratisches – Wenn zwei ökonomische Größen kein „einfaches“ bzw. lineares Verhältnis mehr zueinander haben	126
4.4	Ganze rationale Funktionen n -ten Grades – noch „mehr“ als quadratisch	130
4.5	Gebrochen rationale Funktionen – oder wie verlaufen Funktionen, deren Zuordnungsvorschrift als Bruch geschrieben wird?	135
4.6	Die Wurzelfunktion – ein Beispiel für eine „algebraische“ Funktion	142
4.7	„Transzendenz“ in der Mathematik – die Exponential- und Logarithmusfunktion	145
	Literatur	152
5	Differenzialrechnung für Funktionen einer Variablen	153
5.1	Grundlagen der Differenzialrechnung – Wie Änderungstendenzen von Funktionen erkannt und interpretiert werden können	158
5.2	Mit Differenzenquotienten arbeiten – Wie Ableitungen „per Hand“ bestimmt werden können	161
5.3	Ableitungsregeln – Wie Funktionen geschickt und elegant abgeleitet werden können	165
5.4	Weitere nützliche Ableitungstechniken und Ableitungen – Wie wir uns das Ableiten weiterhin erleichtern können	167
5.5	Höhere Ableitungen – Was wir tun können, wenn die erste Ableitung nicht ausreicht	171
5.6	Grenzfunktionen und Differenziale – Wie wir die erste Ableitung wirtschaftswissenschaftlich interpretieren können	173
5.7	Kurvendiskussion – Was uns die Differenzialrechnung im Detail über die Eigenschaften von Funktionen verrät	174
5.8	Elastizitäten – Wie stark reagieren ökonomische Größen, wenn sich ihre Einflussgrößen ändern	182
	Literatur	191

6	Integralrechnung	193
6.1	Integralrechnung als Umkehrung der Differenzialrechnung – Was ist ein „unbestimmtes Integral“?	195
6.2	Das bestimmte Integral – oder wie kann man krummlinig berandete Flächen berechnen?	197
6.3	Wie können wir die Kosten- und Erlösfunktion geometrisch interpretieren?	201
6.4	Wie können wir kompliziertere Integrale bestimmen bzw. gibt es jeweils passende Integrationsmethoden?	203
6.5	Wie integriert man Funktionen über unendliche Intervalle?	206
	Literatur	212
7	Differenzialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen	213
7.1	Funktionen mit mehreren Veränderlichen – Was ist das und wie können wir sie veranschaulichen?	216
7.2	Partielle Ableitungen – Wie wir Steigungen von Funktionsflächen bestimmen können	218
7.3	Partielle Ableitungen interpretieren – Wie wir Charakteristika von Funktionen mit mehreren Variablen bestimmen können	222
7.4	Partielle Ableitungen nutzen – Wie wir ökonomische Fragestellungen mit Funktionen mit mehreren Veränderlichen beantworten können	228
7.4.1	Gewinnmaximierung durch Preisdifferenzierung	228
7.4.2	Eine Ausgleichsgerade finden	228
7.4.3	Eine Minimalkostenkombination finden	230
7.4.4	Partielle Elastizitäten bestimmen	232
	Literatur	239
8	Lineare Algebra	241
8.1	Grundlagen	244
8.1.1	Vektoren und Matrizen	244
8.1.2	Sonderformen von Matrizen	244
8.1.3	Matrixoperationen	246
8.1.4	Matrixoperationen mit Microsoft Excel	255
8.1.5	Übungen	256
8.2	Lösung komplexerer linearer Gleichungssysteme mit der Matrizenrechnung	260
8.2.1	Gleichungssysteme in Matrixschreibweise	262
8.2.2	Gauß’scher Algorithmus mit Pivotisierung	263
8.2.3	Gleichungssysteme mit Microsoft Excel lösen	266
8.2.4	Verwendung der Inversen zur Lösung eines Gleichungssystems	268
8.2.5	Übungen	269
8.2.6	Lösungen	270
8.3	Determinanten	272
8.3.1	Determinanten einer 2×2 -Matrix	272
8.3.2	Determinanten einer 3×3 -Matrix – Regel von Sarrus	273
8.3.3	Determinanten von $n \times n$ -Matrizen – Entwicklung nach Co-Faktoren	276
8.3.4	Lösung linearer Gleichungssysteme mithilfe von Determinanten – Regel von Cramer	279
8.3.5	Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems	280
8.3.6	Übungen	283
8.3.7	Lösungen	284

8.4	Input-Output-Rechnung	287
8.4.1	Mathematische Darstellung von Rohstoff-, Produktions- und Verkaufsmengen	287
8.4.2	Matrixschreibweise des Input-Output-Modells	290
8.4.3	Berechnung der Verkaufsmengen	291
8.4.4	Berechnung der Rohstoffmengen	292
8.4.5	Ermittlung der Produktionsmengen	293
8.4.6	Übungen	295
8.4.7	Lösungen	296
8.5	Lineare Optimierung	298
8.5.1	Grafische Lösung einfacher Optimierungsprobleme	299
8.5.2	Rechnerische Lösung – Simplex-Algorithmus	300
8.5.3	Optimale Lösung mit dem Computer ermitteln	305
8.5.4	Übungen	307
8.5.5	Lösungen	308
8.6	Anhang	314
8.6.1	Aktivierung des Solvers in Microsoft Excel	314
8.6.2	Installation des Tools „What’s Best!“ von „LINDO SYSTEMS INC“	314
	Literatur	316
9	Finanzmathematik	317
9.1	Wichtige Begriffe und Finanzmarktprodukte verstehen	320
9.1.1	Theorie	320
9.1.2	Übungsaufgaben	326
9.1.3	Lösungen	326
9.2	Grundlagen der Zinsrechnung	327
9.2.1	Theorie	328
9.2.2	Übungsaufgaben	341
9.2.3	Lösungen	343
9.3	Barwertrechnung	347
9.3.1	Theorie	348
9.3.2	Übungsaufgaben	352
9.3.3	Lösungen	352
9.4	Renten und Ratenzahlungen	354
9.4.1	Theorie	355
9.4.2	Übungsaufgaben	364
9.4.3	Lösungen	366
9.5	Tilgungsrechnung	370
9.5.1	Systematik der Kredittilgung	370
9.5.2	Tilgung mit variablen Raten	371
9.5.3	Konstante Raten/Annuitätentilgung	373
9.5.4	Berechnung des Effektivzinses eines Kredites	376
9.5.5	Übungsaufgaben	380
9.5.6	Lösungen	381
9.6	Abschreibungen und andere Anwendungen der Finanzmathematik	382
9.6.1	Theorie	382
9.6.2	Übungsaufgaben	387
9.6.3	Lösungen	387
	Literatur	392

10	Deskriptive Statistik	393
10.1	Grundbegriffe – Wie werden aus Informationen Daten, mit denen gerechnet werden kann?	396
10.1.1	Grundgesamtheit versus Stichprobe – Haben wir wirklich alle Daten?	396
10.1.2	Skalenniveau – nicht nur Menschen, auch Daten weisen bestimmte Charakteristiken auf	397
10.2	Datenverdichtung mithilfe von Grafiken – manchmal sagt eine Grafik mehr als tausend Worte	398
10.2.1	Häufigkeitsverteilung	398
10.2.2	Balkendiagramm	401
10.2.3	Kreisdiagramm	402
10.2.4	Sequenzdiagramm	403
10.2.5	Histogramm	404
10.2.6	Streudiagramm	406
10.3	Datenverdichtung mithilfe von Lageparametern – Wo ist die „Mitte“ der Daten?	407
10.3.1	Arithmetischer Mittelwert	408
10.3.2	Geometrischer Mittelwert	411
10.3.3	Harmonischer Mittelwert	412
10.3.4	Modalwert	413
10.3.5	Median	413
10.4	Datenverdichtung mithilfe von Streuungsparametern – Sind die Daten sehr ähnlich oder weichen sie stark voneinander ab?	415
10.4.1	Spannweite	415
10.4.2	Mittlere Abweichung	416
10.4.3	Quantile	417
10.4.4	Varianz	418
10.4.5	Standardabweichung	419
10.4.6	Variationskoeffizient	419
10.4.7	Schiefe und Wölbung	420
10.4.8	Boxplot	422
10.5	Konzentrationsmaße – Bekommen alle gleich viel vom Kuchen? Wer hat die (Markt-)Macht?	423
10.5.1	Lorenzkurve	423
10.5.2	Gini-Koeffizient	424
10.5.3	Herfindahl-Index	426
10.6	Indexierung – Wie kann die zeitliche Entwicklung mehrerer Variablen vergleichbar gemacht werden?	426
10.6.1	Allgemeine Indexierung	426
10.6.2	Preis-, Mengen- und Umsatzindexierung	428
10.7	Korrelation – Stehen zwei Variablen in Beziehung zueinander?	430
10.7.1	Kreuztabelle	430
10.7.2	Korrelationskoeffizient	432
	Literatur	439
11	Wahrscheinlichkeitsrechnung	441
11.1	Wahrscheinlichkeitsbegriff und Zufallsexperiment	444
11.2	Wahrscheinlichkeitstheorie – Rechenregeln zum adäquaten Umgang mit Wahrscheinlichkeiten	445
11.2.1	Additionssatz	445
11.2.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	446
11.2.3	Unabhängigkeit von Ereignissen	447

11.2.4 Multiplikationssatz	448
11.2.5 Totale Wahrscheinlichkeit	449
11.3 Kombinatorik – Wie viele Anordnungen von n Objekten gibt es? Wie viele Ergebnisse hat ein Experiment?	450
11.3.1 Permutation	450
11.3.2 Variation	452
11.3.3 Kombination	453
11.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung – Wahrscheinlichkeiten grafisch und zahlenmäßig darstellen	453
11.4.1 Zufallsvariable	454
11.4.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion	454
11.4.3 Verteilungsfunktion	455
11.4.4 Dichtefunktion	455
11.4.5 Momente von Wahrscheinlichkeiten	458
11.5 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Wahrscheinlichkeiten bei Experimenten mit endlich vielen möglichen Ergebnissen	461
11.5.1 Binomialverteilung	461
11.5.2 Hypergeometrische Verteilung	465
11.5.3 Geometrische Verteilung	467
11.5.4 Poisson-Verteilung	469
11.6 Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Wahrscheinlichkeiten bei Experimenten mit unendlich vielen möglichen Ergebnissen	471
11.6.1 Gleichverteilung	473
11.6.2 Exponentialverteilung	475
11.6.3 Normalverteilung	477
11.6.4 Prüfverteilungen	482
Literatur	489
12 Schließende Statistik	491
12.1 Schätzverfahren – Was tun, wenn man gar nichts über die Grundgesamtheit weiß?	494
12.1.1 Schätzung für den Erwartungswert	495
12.1.2 Schätzung für die Varianz	498
12.1.3 Schätzung für den Anteilswert	501
12.2 Testverfahren – Wie können Behauptungen bezüglich der Grundgesamtheit widerlegt oder gestärkt werden?	503
12.2.1 Hypothesen über Mittelwerte	504
12.2.2 Hypothesen über Mediane	520
12.2.3 Hypothesen über Varianzen	526
12.2.4 Hypothesen über Anteilswerte	533
12.2.5 Hypothesen über die Normalverteilung	543
Literatur	552
Sachverzeichnis	553